STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 6 - Brownian Motion

Lecturer: Weichen Zhao — Fall 2025

Key concepts:

- 布朗运动。

布朗运动简史：

- (1827年) 布朗的最初观察

  布朗运动得名于苏格兰植物学家罗伯特·布朗（Robert Brown），他于1827年在显微镜下观察到悬浮在水中的花粉颗粒的随机运动。布朗并未理解这种运动的原因，但他排除了这种现象是由生命活动引起的。

- (1905年) 爱因斯坦的理论解释

  1905年，阿尔伯特·爱因斯坦发表了一个理论，用以解释布朗运动的本质。他提出，这种随机运动是由水分子对悬浮颗粒的撞击所引起的。爱因斯坦通过物理学的方法导出了布朗运动的方程，并且成功地解释了颗粒运动的速度与颗粒大小、温度等因素的关系。

- (1923年) 维纳的严格定义

  1923年，匈牙利数学家诺伯特·维纳（Norbert Wiener）从纯数学角度定义了布朗运动，亦被称为维纳过程 (Wiener process)。维纳过程是随机过程的一种，它严格定义了布朗运动的数学性质。

- (1940年代) 伊藤的扩展

  1940年代，日本数学家伊藤清（Kiyoshi Itô）对布朗运动的数学理论进行了进一步发展，提出了著名的伊藤积分和伊藤引理。这些工具为随机微分方程的理论奠定了基础，使得布朗运动能够在更广泛的随机系统中得到应用。

- (1900年) 小插曲

  1900年，法国数学家 Louis Bachelier 通过对巴黎股票市场的观察与研究也得到了布朗运动的许多深刻性质，比 Einstein 还早 5 年。但遗憾的是，Einstein 和 Bachelier 的名字在这种运动的命名中都缺席了。

  "Einstein 是无所谓了，反正任何东西相对于相对论来说都是高阶无穷小，但对 Bachelier 来说，这实在是太遗憾了，因为他除了 Brown 运动以外好像就没有其他东西了。但有什么办法呢？历史常常是让人叹息的啊！"

  ——任佳刚

6.1 布朗运动的定义

下面给出布朗运动的数学定义

Definition 6.1 (布朗运动 Brownian motion) 设$(B_t)_{t\geq 0}$为一个随机过程，如果：

(1) (轨道连续) 样本轨道几乎处处连续；

(2) (独立增量) $\forall\, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$， $B_0, B_{t_1} - B_0, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$相互独立；

(3) (高斯性) $\forall\, s < t$, $B_t - B_s$服从高斯分布$N(0, t-s)$.

那么我们称 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为一个一维布朗运动，如果 $B_0 = 0$，我们称 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为一个标准布朗运动。

注1. 物理的直观解释，参考：龚光鲁，《随机微分方程及其应用概要》，4.1节；高洪俊等，《随机微分方程导论》，3.1节。

注2. 考虑$(B_t)_{t\geq 0}$的自然σ代数流

$$\mathscr{F}_t \triangleq \sigma(\{B_s : 0 \leq s \leq t\}).$$

定义6.1中的条件(2)等价于 $\forall\, 0 \le s < t$，$B_t - B_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立。

补充定义：称两个子事件域 $\mathscr{G}_1$ 和 $\mathscr{G}_2$ 独立，如果对任何$G_1 \in \mathscr{G}_1$，$G_2 \in \mathscr{G}_2$ ，都有

$$P(G_1 \cap G_2) = P(G_1)P(G_2)$$

称随机变量 X 和 $\mathscr{F}$ 独立，如果 $\sigma(X)$ 和 $\mathscr{F}$ 独立，其中

$$\sigma(X) = \{\{\omega : X(\omega) \in B\} : B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

注3. 布朗运动的构造，参考：高洪俊等，《随机微分方程导论》，3.3节。

接下来我们介绍一个常见的布朗运动的等价定义。

Definition 6.2 (高斯过程) 称一个随机过程 X_t 为一个高斯过程，如果对于所有 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，随机向量 $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ 服从 n 元高斯分布。

注. 随机向量 $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ 的联合分布称为连续随机过程的有限维分布。

Proposition 6.3 布朗运动 $(B_t)_{t\ge 0}$ 为一个高斯过程。

Proof: 对于所有$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，由于$B_{t_k}$，$k = 1, \ldots, n$ 都是 $B_{t_1}, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 2, \ldots, n$ 的线性组合，即 $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$ 是 $(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ 的线性变换。

又 $B_{t_1}, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, k = 2, \ldots, n$ 为独立的高斯随机变量，所以$(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$是联合多元高斯的，即布朗运动为一个高斯过程。 ■

Proposition 6.4 设$(B_t)_{t\ge 0}$为一个标准布朗运动，那么

$$Cov(B_t, B_s) = t \wedge s.$$

Proof: 由于 B_t 为标准布朗运动，那么 B_t 为服从 $N(0,t)$ 的随机变量，不妨假设$s < t$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[B_t B_s] = \mathbb{E}[((B_t - B_s) + B_s)B_s] \\
&= \mathbb{E}[B_s^2] + \mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)] \\
&= s + \underbrace{\mathbb{E}[B_s]}_{=0}\underbrace{\mathbb{E}[B_t - B_s]}_{=0} = s.
\end{aligned}$$

■

下面的命题给出了一个布朗运动的等价定义

Proposition 6.5 设$B_0 = 0$，样本轨道连续的随机过程 $(B_t)_{t\geq 0}$ 为一个布朗运动当且仅当$(B_t)_{t\geq 0}$为一个高斯过程，而且满足：

$$\mathbb{E}B_t = 0,\ \mathbb{E}[B_tB_s] = t \wedge s, \quad \forall\, t, s$$

Proof: 留作作业 ■

6.2 布朗运动的基本性质

Proposition 6.6 设$(B_t)_{t\geq 0}$为一个标准布朗运动，那么

(1) (shifting) 固定$t_0 \geq 0$, $B_{t_0+t} - B_{t_0}$为一个布朗运动;

(2) (scaling) $\forall c \neq 0 \in \mathbb{R}$, $cB_{\frac{t}{c^2}}$ 为一个布朗运动，特别地，$c = -1$, $-B_t$ 为一个布朗运动;

(3) (time reversal)

$$\tilde{B}_t \triangleq \begin{cases} 0, & t = 0 \\ tB_{\frac{1}{t}}, & t > 0 \end{cases}$$

为一个布朗运动。

Proof: (1) (2) 留作作业，验证轨道连续、独立增量、高斯性这三条性质即可；

(3) 对任意的$0 < s < t$，

$$\begin{aligned} \tilde{B}_t - \tilde{B}_s = &\quad tB_{\frac{1}{t}} - sB_{\frac{1}{s}} \\ = &\quad (t-s)B_{\frac{1}{t}} - s(B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}). \end{aligned}$$

由于 B_t 为一个布朗运动，所以

$$B_{\frac{1}{t}} \sim N(0, \frac{1}{t}), B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}} \sim N(0, \frac{1}{s} - \frac{1}{t}),$$

且 $B_{\frac{1}{t}}$ 与 $B_{\frac{1}{s}} - B_{\frac{1}{t}}$ 独立，故 $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s \sim N(0, t-s)$，那么 $\tilde{B}_t$ 为一个高斯过程，而且

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_t] = t\mathbb{E}[B_{\frac{1}{t}}] = 0.$$

$$\mathbb{E}[\tilde{B}_t\tilde{B}_s] = ts\mathbb{E}[B_{\frac{1}{t}}B_{\frac{1}{s}}] = t \wedge s.$$

由命题 6.5，我们接下来只需要验证轨道连续性：

对于$t > 0$，由于$t \mapsto B_t$ 以及$t \mapsto \frac{1}{t}$ 连续，所以 $t \mapsto tB_{\frac{1}{t}}$ 连续；

对于 $t = 0$，定义事件：

$$\tilde{A} \triangleq \{\omega : \tilde{B}_t \to 0, as\ t \to 0\}$$

$$A \triangleq \{\omega : B_t \to 0, as\ t \to 0\}$$

那么

$$\tilde{A} = \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, \frac{1}{m}]} \{\omega : |\tilde{B}_q(\omega)| \leq \frac{1}{n}\}$$

同理

$$A = \bigcap_n \bigcup_m \bigcap_{q \in \mathbb{Q} \cap (0, \frac{1}{m}]} \{\omega : |B_q(\omega)| \leq \frac{1}{n}\}$$

由于任意$t > 0$，

$$\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}} \sim N(0, t^2 \times \frac{1}{t}) = N(0, t)$$

与B_t同分布，所以 $\mathrm{P}(\tilde{A}) = \mathrm{P}(A)$。另一方面，由于$B_t$在$t = 0$处连续，所以$\mathrm{P}(A) = 1$，那么$\mathrm{P}(\tilde{A}) = 1$，即$\tilde{B}_t$在$t = 0$处几乎处处连续。

■

Corollary 6.7 几乎必然地，$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = 0$.

Proof: 应用时间反转不变性，

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t} = \lim_{t\to\infty} \tilde{B}_{\frac{1}{t}} = 0$$

■

Lemma 6.8 (反射原理) 设τ为一个停时， $\{B_t : t \geqslant 0\}$为一个标准布朗运动, 那么定义随机过程

$$B_t^* := B_t 1_{\{t \leqslant \tau\}} + (2B_\tau - B_t) 1_{\{t > \tau\}}$$

依然为一个布朗运动，称为B_t在τ处的反射布朗运动。

Proof: 证明反射原理需要通过布朗运动的强马氏性，细节参考：Mörters Peter, and Yuval Peres. Brownian motion. Vol. 30. Cambridge University Press, 2010. 2.2.1节。 ■